

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Analysis</b>	<b>10</b>
2.1	Überbestimmte Gleichungssysteme: Der analytische Blickwinkel . . . . .	10
2.2	Harmonische Funktionen . . . . .	12
2.2.1	Grundlegendes zum Thema . . . . .	12
2.2.2	Die Mittelwerteigenschaften harmonischer Funktionen . . . . .	12
2.2.3	Geometrische Eigenschaften harmonischer Funktionen . . . . .	21
2.3	Neue Darstellungen der EULERSchen Zahl mit rascher Konvergenz . . . . .	29
2.4	Eine Anwendung der EULERSchen Formel . . . . .	33
2.5	Eine funktionentheoretische Herleitung ... . . . .	37
2.6	Zum WALLISSchen Produkt und dem Integral $\int_0^\infty e^{-x^2} \cdot dx$ . . . . .	40
2.7	Einige Anwendungen der EULERSchen Formeln . . . . .	41
2.8	Bemerkungen zur partiellen Integration . . . . .	44
2.9	Ein bestimmtes Integral aus der Stochastik . . . . .	45
2.10	Iteratives Lösen quadratischer Gleichungen . . . . .	47
2.11	Harmonische Folgen . . . . .	49
2.12	Eine interessante Proportion . . . . .	51
2.13	Eine ästhetische Wendestellenformel . . . . .	53
2.14	Drei besondere Kurvenscharen . . . . .	55
2.15	Über Umfänge und Oberflächeninhalte . . . . .	60
2.16	Substitutionsregel-Sektorformel-Hyperbelfunktionen . . . . .	70
<b>3</b>	<b>Stochastik</b>	<b>75</b>
3.1	Lineare Regression . . . . .	75
3.2	Quadratische Regression . . . . .	80
3.3	Ergänzungen zur quadratischen und zur linearen Regression . . . . .	82
3.4	Zur $\chi^2$ -Verteilung . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Zahlentheorie</b>	<b>100</b>
4.1	Periodenlängen von Stammbrüchen . . . . .	100
4.2	Divisionen und geometrische Reihen . . . . .	101
<b>5</b>	<b>Algebra</b>	<b>104</b>
5.1	Zum arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittel . . . . .	104
5.2	Mehr zum arithmetischen, geometrischen und harmonischen Mittel . . . . .	106
5.3	Drehungen im $\mathbb{R}^n$ und die $SO(n)$ . . . . .	108
5.4	Ein alternativer Weg zur $SO(3)$ . . . . .	111
5.5	Konstruktion der $SO(4)$ . . . . .	115
5.6	Exaktes grafisches Lösen quadratischer Gleichungen via Kreis . . . . .	127
5.7	Ein aus den Kugelkoordinaten generiertes Vektorprodukt des $\mathbb{R}^3$ . . . . .	130
5.8	Eine kurze Bemerkung zur kleinen Lösungsformel . . . . .	136
5.9	Eine zweite kurze Bemerkung zur kleinen Lösungsformel . . . . .	137
5.10	Ein etwas ungewöhnlicher Blick auf quadratische Gleichungen ... . . . .	138
5.11	Eine weitere Bemerkung zu quadratischen Gleichungen . . . . .	139

5.12	Eine besondere lineare Abbildung . . . . .	141
5.13	Ein genetischer Zugang zur CARDANO-Formel . . . . .	146
5.14	Eine interessante Untergruppe der $SO(3)$ . . . . .	147
5.15	Summenformeln, Teil 1: Kombinatorik . . . . .	151
5.16	Summenformeln, Teil 2 . . . . .	152
5.17	Summenformeln, Teil 3 . . . . .	153
5.18	Summenformeln, Teil 4 . . . . .	154
5.19	Summenformeln, Teil 5 . . . . .	155
5.20	Summenformeln, Teil 6 . . . . .	156
5.21	Summenformeln, Teil 7 . . . . .	157
5.22	Summenformeln, Teil 8 . . . . .	158
5.23	Eine alternative Parametrisierung pythagoreischer Tripel . . . . .	160
<b>6</b>	<b>Geometrie</b> . . . . .	<b>161</b>
6.1	Ein (geo)metrisch motivierter Zugang zum Skalarprodukt . . . . .	161
6.2	Ein (geo)metrisch motivierter Zugang zur Determinante . . . . .	168
6.3	Überbestimmte Gleichungssysteme: Der geometrische Blickwinkel . . . . .	177
6.4	Dreiecksgeometrie . . . . .	179
6.4.1	Höhenschnittpunkte und Kegelschnitte . . . . .	179
6.4.2	Ein schöner Dreieckssatz . . . . .	183
6.4.3	Ein weiterer schöner Dreieckssatz . . . . .	184
6.5	Die Raute als Generator für Skalarprodukt und Determinante . . . . .	185
6.6	Schmankerln aus der technischen Mathematik . . . . .	187
6.6.1	Der MOHRsche Spannungskreis . . . . .	187
6.6.2	Die MOHRsche Sicherheitsparabel . . . . .	189
6.7	HESSEsche Abstandsformel, Winkelfunktionen und eine Bemerkung zur Stochastik . . . . .	190
6.8	Ein alternativer Zugang zur Flächeninhaltsformel des Trapezes . . . . .	192
6.9	Gleichseitige Dreiecke und parallele Geraden . . . . .	194
6.10	Bemerkung zu den Doppelwinkelformeln des (Co)-Sinus . . . . .	196
6.11	Trigonometrische Sumsätze und Geodäsie . . . . .	197
6.12	Projektive Geometrie, lineare Algebra & Analysis . . . . .	200
6.13	Ein wenig algebraische Geometrie . . . . .	205
6.13.1	Ein interessanter Satz über kubische Kurven . . . . .	205
6.13.2	Über kubische Kurven und komplexe Elemente . . . . .	208
6.14	Weitere neue PYTHAGORAS-Beweise . . . . .	212
6.14.1	Ein erster neuer Beweis des Satzes von PYTHAGORAS . . . . .	212
6.14.2	Ein zweiter neuer Beweis des Satzes von PYTHAGORAS . . . . .	214
6.14.3	Ein dritter neuer Beweis des Satzes von PYTHAGORAS . . . . .	215
6.14.4	Ein vierter neuer Beweis des Satzes von PYTHAGORAS . . . . .	216
6.14.5	Ein fünfter neuer Beweis des Satzes von PYTHAGORAS . . . . .	219
6.14.6	Ein sechster neuer Beweis des Satzes von PYTHAGORAS . . . . .	221
6.14.7	Ein siebenter neuer Beweis des Satzes von PYTHAGORAS . . . . .	222
6.15	Kegelschnitte . . . . .	223
6.15.1	Eine feste Ellipse oskulierende Parabelschar . . . . .	223
6.15.2	Mongesche Leitkreise/Klassifikation von Kurven 2. Grades . . . . .	225
6.15.3	Ein Hyperbelsatz . . . . .	230

6.15.4	Harmonische Punktequadrupel und Kegelschnitte . . . . .	231
6.15.5	Eine neue Krümmungskreis-konstruktion für die Parabel . . . . .	233
6.15.6	Entartete Kegelschnitte . . . . .	237
6.15.7	Zur Klassifikation von Kegelschnitten . . . . .	239
6.15.8	Flächeninhalte von Ellipsen in allgemeiner Lage . . . . .	240
6.15.9	Ein Satz von GRASSMANN über Dreiecksgeometrie und gleichseitige Hyperbeln . . . . .	241
6.15.10	Aus Ellipsen wird eine Parabel - projektive Geometrie! . . . . .	246
6.15.11	Eine einer Ellipse zugeordnete gleichseitige Hyperbel . . . . .	247
6.15.12	Einhüllende einer Ellipsenschar . . . . .	253
6.15.13	Zur Reflexionseigenschaft der Parabel(tangente) . . . . .	255
6.15.14	Parabelpolaren alternativ . . . . .	257
6.15.15	Eine bemerkenswerte Eigenschaft der Parabel . . . . .	258
6.15.16	Ein besonderes Ellipsen-Hyperbelpaar . . . . .	260
6.15.17	Die Ellipse und das harmonische Mittel . . . . .	263
6.16	Interessante aus PYTHAGORAS-Beweis-Figuren generierte Kurven . . . . .	267
6.16.1	Eine Kurve aus dem ersten Beweis . . . . .	267
6.16.2	Eine aus dem zweiten Beweis generierte <i>Strophoide</i> . . . . .	273
6.17	Harmonisches und Fraktales . . . . .	278
6.18	Eine interessante Hüllkurve . . . . .	279
6.19	Eine Schar rotierender Ellipsen . . . . .	288
6.20	Traktrix und Pseudosphäre . . . . .	290